

Digitális szűrők

Államvizsga-tétel

Kivonat

A tétel a diszkrét idejű, lineáris, invariáns rendszerek elméletének keretében tárgyalja a digitális szűrők fogalmát, osztályozását, leírási módjait (rendszer egyenlet, impulzusválasz, átviteli karakterisztika, z -tartománybeli átviteli függvény), valamint tervezési és realizálási módszereit. Bemutatásra kerül a véges (FIR) és végtelen (IIR) impulzusválaszú szűrők összehasonlítása, az ablakozásos FIR-tervezés, a bilineáris transzformáción alapuló IIR-tervezés, továbbá a stabilitás kérdése a z -sík pólus-zérus elrendezésén keresztül. A jelölésrendszer Kuczmann Miklós *Jelek és rendszerek* c. tankönyvét követi.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés és motiváció	2
2. Diszkrét idejű, lineáris, invariáns rendszerek	3
2.1. Alapfogalmak	3
2.2. Az impulzusválasz és a konvolúció	3
2.3. A rendszer egyenlet (differenciaegyenlet)	3
2.4. FIR és IIR osztályozás	4
2.5. Stabilitás	4
3. Frekvenciatartománybeli leírás	4
3.1. Az átviteli karakterisztika	4
3.2. Amplitúdó- és fáziskarakterisztika	5
3.3. Az impulzusválasz és a frekvenciakarakterisztika	5
4. A z-transzformáció és az átviteli függvény	5
4.1. A z -transzformáció definíciója	5
4.2. Az átviteli függvény	5
4.3. Pólus-zérus felbontás, stabilitás	5
4.4. Kapcsolat az alapleírások között	6
5. Szűrőspecifikáció és szűrőtípusok	6
5.1. Az ideális frekvenciaszelektív szűrők	6
5.2. Reális szűrőspecifikáció	6
6. FIR szűrők	7
6.1. Tulajdonságok	7
6.2. Lineáris fázis	7
6.3. Tervezés ablakozással	7
6.4. Egyéb FIR-tervezési módszerek	8
6.5. FIR realizációs struktúrák	8

7. IIR szűrők	8
7.1. Általános alak	8
7.2. Tervezés analóg prototípusból	8
7.3. Bilineáris (Tustin) transzformáció	9
7.4. Impulzusinvariáns transzformáció	9
7.5. Az IIR-tervezés lépésrendszere	9
7.6. IIR realizációs struktúrák	10
8. FIR és IIR összehasonlítása	10
9. Megvalósítási kérdések	10
9.1. Véges szóhossz és kvantálási hibák	10
9.2. Limit cycle	11
9.3. Hardver-platformok	11
10.Szám példa: másodrendű IIR aluláteresztő bilineáris tervezéssel	11
11.Alkalmazási területek	12
12.Összefoglalás	12
Felhasznált irodalom	12

1. Bevezetés és motiváció

Egy *szűrő* olyan rendszer, amely a bemeneti (gerjesztő) jel egyes frekvenciakomponenseit átengedi, másokat elnyom vagy módosít. Folytonos idejű (analóg) szűrők esetén ezt a feladatot passzív vagy aktív áramköri elemekkel (ellenállás, kondenzátor, tekercs, műveleti erősítő) realizáljuk. *Digitális szűrőről* akkor beszélünk, amikor a szűrési műveletet egy diszkrét idejű, lineáris, invariáns rendszer valósítja meg számítógép, mikrokontroller, DSP processzor vagy FPGA segítségével, a bemeneti és kimeneti jelek pedig T_s mintavételi periódusú számsorozatok.

A digitális szűrők előnyei az analóg megfelelőekkel szemben:

- **Pontosság és reprodukálhatóság:** az együtthatók numerikus értékek, nincs alkatrészszerelés, hőfokfüggés, öregedés.
- **Tetszőleges karakterisztika:** lineáris fázismenet, tetszőlegesen meredek átmeneti tartomány elérhető.
- **Adaptivitás:** az együtthatók futás közben hangolhatók (LMS, RLS, Kalman-szűrő stb.).
- **Nagy dinamikatartomány:** lebegőpontos aritmetikával gyakorlatilag korlátlan.

Hátrány a véges szókinccsel járó kvantálási zaj, az aritmetikai műveletek véges sebessége (minta-vételi frekvencia felső korlátja), valamint az analóg-digitális átalakítók (ADC/DAC) szükségessége a folytonos idejű világ felé.

A digitális jelfeldolgozás láncolatának sematikus felépítése:

$$s_a(t) \xrightarrow{\text{ADC, } T_s} s[k] \xrightarrow{\text{digitális szűrő}} y[k] \xrightarrow{\text{DAC, tartó, simító szűrő}} y_a(t).$$

2. Diszkrét idejű, lineáris, invariáns rendszerek

2.1. Alapfogalmak

Diszkrét idejű (DI) jel egy $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ (vagy \mathbb{C}) leképezés, amelyet $s[k]$ alakban jelölünk, ahol $k \in \mathbb{Z}$ az ütem (mintavételi index). Egy diszkrét idejű rendszer egy $\mathcal{T}\{\cdot\}$ operátor, amely az $s[k]$ gerjesztéshez egy $y[k]$ válaszjelet rendel:

$$y[k] = \mathcal{T}\{s[k]\}. \quad (1)$$

A vizsgált rendszerek tulajdonságai:

Linearitás

Tetszőleges $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ és $s_1[k], s_2[k]$ jelekre $\mathcal{T}\{\alpha s_1 + \beta s_2\} = \alpha \mathcal{T}\{s_1\} + \beta \mathcal{T}\{s_2\}$.

Invariáncia

(időfüggetlenség) Ha $y[k] = \mathcal{T}\{s[k]\}$, akkor tetszőleges $K \in \mathbb{Z}$ eltolásra $\mathcal{T}\{s[k-K]\} = y[k-K]$.

Kauzalitás

$y[k]$ csak az $s[i]$, $i \leq k$ értékektől függ.

Stabilitás

Korlátos bemenetre korlátos kimenet (BIBO).

2.2. Az impulzusválasz és a konvolúció

A $\delta[k]$ egységimpulzusra adott választ a rendszer *impulzusválaszának* (vagy súlyfüggvényének) nevezzük:

$$w[k] = \mathcal{T}\{\delta[k]\}, \quad \delta[k] = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases}. \quad (2)$$

Mivel tetszőleges $s[k]$ jel előállítható eltoló egységimpulzusok lineáris kombinációjaként,

$$s[k] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} s[i] \delta[k-i], \quad (3)$$

a linearitás és az invariáns tulajdonság alapján a válasz:

$$y[k] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} s[i] w[k-i] \equiv s[k] * w[k]. \quad (4)$$

A $*$ operátor a *diszkrét idejű konvolúció*. Tulajdonságai: kommutatív, asszociatív, disztributív. Kauzális rendszer és belépő gerjesztés esetén a konvolúciós összeg véges:

$$y[k] = \sum_{i=0}^k s[i] w[k-i] = \sum_{p=0}^k w[p] s[k-p]. \quad (5)$$

Az impulzusválasz tehát teljes mértékben jellemzi a rendszert – ez a digitális szűrőtervezés egyik kulcsfontosságú felismerése.

2.3. A rendszeregyenlet (differenciaegyenlet)

A diszkrét idejű, lineáris, invariáns, kauzális SISO-rendszer rendszeregyenlete egy n -edrendű, állandó együtthatós lineáris differenciaegyenlet:

$$y[k] + \sum_{i=1}^n a_i y[k-i] = \sum_{i=0}^m b_i s[k-i]. \quad (6)$$

A $\{a_i\}$ a visszacsatoló (feedback), a $\{b_i\}$ az előrecsatoló (feedforward) együtthatók. A rendszer rendszáma n .

2.4. FIR és IIR osztályozás

Az impulzusválasz tartója szerint a diszkrét idejű rendszerek két alaposztályba sorolhatók:

FIR (*Finite Impulse Response*)

Az impulzusválasz csak véges $K + 1$ ütemig nem nulla:

$$w[k] = \{\varepsilon[k] - \varepsilon[k - (K + 1)]\} f[k], \quad w[k] = 0 \text{ ha } k < 0 \text{ vagy } k > K. \quad (7)$$

A rendszeregyenletben *nincs visszacsatolás* ($a_i = 0$), így a kimenet a bemenet véges méretű súlyozott összege:

$$y[k] = \sum_{i=0}^K b_i s[k - i]. \quad (8)$$

IIR (*Infinite Impulse Response*)

Az impulzusválasz végtelen tartójú. A rendszeregyenlet rekurzív, azaz tartalmaz visszacsatolást ($a_i \neq 0$ legalább egy i -re).

Megjegyzés. A FIR rendszer hálózati realizációja *transzverzális* (csak előrecsatolás van), a kimenet egy mintavételezett mintaablak konvolúciója a b_i együtthatókkal. Az IIR rendszer realizációja *rekurzív* (visszacsatolt) hálózat. A két osztály eltérő tervezési filozófiát és különböző tulajdonságokat jelent (lásd 8 szakasz).

2.5. Stabilitás

Egy diszkrét idejű, lineáris, invariáns rendszer

- **aszimptotikusan stabilis**, ha a karakterisztikus polinom (azaz (6) bal oldalának karakterisztikus egyenlete) minden λ_i gyökére $|\lambda_i| < 1$ teljesül;
- **gerjesztés-válasz stabilis** (BIBO), ha az impulzusválasz abszolút összegezhető:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |w[k]| < \infty. \quad (9)$$

A FIR rendszer az impulzusválasz végessége miatt mindig BIBO-stabilis. Az IIR rendszer stabilitása a z -tartományban a pólusok elhelyezkedésével ellenőrizhető (lásd 4).

3. Frekvenciatartománybeli leírás

3.1. Az átviteli karakterisztika

Stabilis DI rendszer szinuszos $s[k] = S \cos(\vartheta k + \rho)$ gerjesztésére adott állandósult válasza ugyanazon ϑ normált körfrekvenciájú szinuszos jel:

$$y[k] = Y \cos(\vartheta k + \varphi). \quad (10)$$

A komplex csúcértékek $S = S e^{j\rho}$, $Y = Y e^{j\varphi}$. Hányadosuk az *átviteli karakterisztika*:

$$W(e^{j\vartheta}) = \frac{Y}{S}. \quad (11)$$

A rendszeregyenletre alkalmazva a ϑ szerinti komplex leírást:

$$W(e^{j\vartheta}) = \frac{\sum_{i=0}^m b_i e^{-ji\vartheta}}{1 + \sum_{i=1}^n a_i e^{-ji\vartheta}}. \quad (12)$$

A $W(e^{j\vartheta})$ függvény ϑ -ban 2π szerint periodikus, ezért a $\vartheta \in [-\pi, \pi]$ tartományon szokás ábrázolni. A $\vartheta = \omega T_s$ kapcsolat alapján a $\vartheta = \pi$ a Nyquist-frekvenciának felel meg.

3.2. Amplitúdó- és fáziskarakterisztika

$$W(e^{j\vartheta}) = K(\vartheta) e^{j\varphi(\vartheta)}, \quad K(\vartheta) = |W(e^{j\vartheta})|, \quad \varphi(\vartheta) = \arg W(e^{j\vartheta}). \quad (13)$$

Az amplitúdó-karakterisztika ábrázolása szokásosan dB-ben: $K_{\text{dB}}(\vartheta) = 20 \log_{10} K(\vartheta)$.

3.3. Az impulzusválasz és a frekvenciakarakterisztika

A diszkrét idejű Fourier-transzformáció (DTFT) értelmében:

$$W(e^{j\vartheta}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} w[k] e^{-j\vartheta k}. \quad (14)$$

Tehát a rendszer frekvenciaválasza az impulzusválasz DTFT-je. Ez a digitális szűrőtervezés alapegyenlete: *ha ismerjük a kívánt $W_d(e^{j\vartheta})$ karakterisztikát, akkor inverz DTFT-vel kapjuk a (potenciálisan végtelen tartójú) impulzusválaszt, amelyet véges hosszra kell csonkolni FIR-tervezés esetén.*

4. A z -transzformáció és az átviteli függvény

4.1. A z -transzformáció definíciója

Az $s[k]$ belépő ($s[k] = 0, k < 0$) DI jel egyoldali z -transzformáltja:

$$S(z) = \mathcal{Z}\{s[k]\} = \sum_{k=0}^{\infty} s[k] z^{-k}, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (15)$$

A sor a z -sík egy $|z| > R$ konvergenciatartományán abszolút konvergens. A DTFT $S(e^{j\vartheta})$ a z -transzformált egységkörösre ($|z| = 1$) vett kiértékelése (ha az egységkör a konvergenciatartományba esik).

Fontos transzformáltak: $\mathcal{Z}\{\delta[k]\} = 1$, $\mathcal{Z}\{\varepsilon[k]\} = \frac{z}{z-1}$, $\mathcal{Z}\{\varepsilon[k] q^k\} = \frac{z}{z-q}$. Az eltolási tétel: $\mathcal{Z}\{s[k-i]\} = z^{-i} S(z)$ (belépő jelekre).

4.2. Az átviteli függvény

A rendszeregyenletre alkalmazva a z -transzformációt és belépő gerjesztést feltételezve:

$$Y(z) \left(1 + \sum_{i=1}^n a_i z^{-i}\right) = S(z) \sum_{i=0}^m b_i z^{-i}, \quad (16)$$

ahonnan az *átviteli függvény*:

$$W(z) = \frac{Y(z)}{S(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}}. \quad (17)$$

A $W(z)$ az impulzusválasz z -transzformáltja: $W(z) = \mathcal{Z}\{w[k]\}$.

4.3. Pólus-zérus felbontás, stabilitás

Gyöktényezős alakban:

$$W(z) = K \frac{(z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_m)}{(z - p_1)(z - p_2) \dots (z - p_n)}, \quad (18)$$

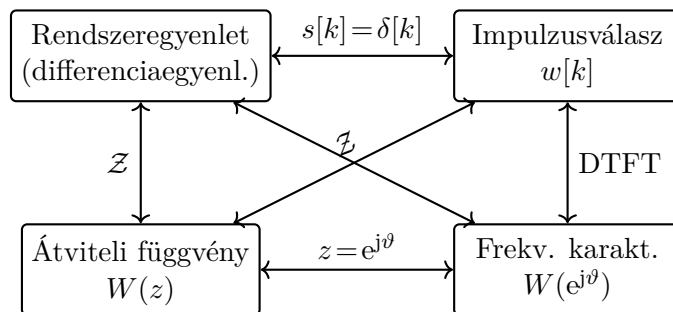
ahol z_i -k a *zérusok* (a számláló gyökei), p_i -k a *pólusok* (a nevező gyökei).

4.1. Tétel (BIBO-stabilitás z -tartományban). *Egy diszkrét idejű, lineáris, invariáns, kauzális rendszer akkor és csak akkor gerjesztés-válasz stabilis, ha átviteli függvényének minden pólusa az egységkör belsejében van:*

$$|p_i| < 1, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (19)$$

Geometriai értelmezés: $W(e^{j\vartheta})$ az átviteli függvény $z = e^{j\vartheta}$ helyen vett értéke, azaz a z -síkon az egységkör pontjain mozogva olvashatjuk le a frekvenciaválaszt. Egy egységkörhöz közeli pólus a karakterisztikán éles csúcsot (rezonanciát), egy egységkörhöz közeli zérus pedig mély bevágást (notch) eredményez.

4.4. Kapcsolat az alapeírások között



5. Szűrőspecifikáció és szűrőtípusok

5.1. Az ideális frekvenciaszelektív szűrők

A négy alapvető szelektív karakterisztika (ϑ_c vágási normált körfrekvenciával):

- Aluláteresztő (LP): $|W(e^{j\vartheta})| = 1$ ha $|\vartheta| < \vartheta_c$, egyébként 0.
- Feluláteresztő (HP): $|W(e^{j\vartheta})| = 1$ ha $\vartheta_c < |\vartheta| \leq \pi$, egyébként 0.
- Sáváteresztő (BP): $|W(e^{j\vartheta})| = 1$ ha $\vartheta_1 < |\vartheta| < \vartheta_2$.
- Sávváró (BS): a sáváteresztő komplementere.

Az ideális aluláteresztő szűrő impulzusválasza (a tankönyv 10.6. ábrájával összhangban):

$$w_d[k] = \frac{\sin(\vartheta_c k)}{\pi k}, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (20)$$

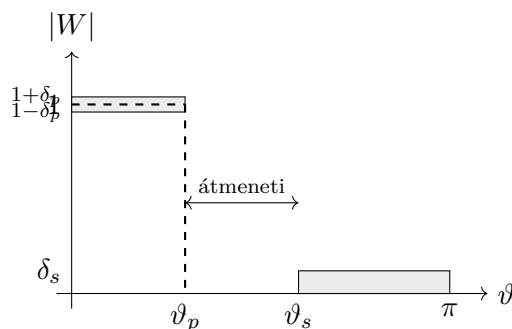
Ez a sinc-jellegű impulzusválasz *nem belépő* (a $k < 0$ ütemekben sem nulla), tehát a rendszer *nem kauzális*, így *nem realizálható*. Ezért nevezik *ideális szűrőnek* – csak közelíthető.

5.2. Réális szűrőspecifikáció

A gyakorlatban megengedünk:

- véges meredekségű *átmeneti tartományt* (ϑ_p áteresztő szél, ϑ_s záró szél),
- ingadozást az áteresztő tartományban (δ_p ripple),
- véges elnyomást a záró tartományban (δ_s vagy A_s dB-ben).

Ezeket egy ún. *tűrésdiagram* foglalja össze:



6. FIR szűrők

6.1. Tulajdonságok

A FIR szűrő rendszeregyenlete a konvolúciós összeg (8), ahol a b_i együtthatók megegyeznek az $w[i]$ impulzusválasz mintáival:

$$y[k] = \sum_{i=0}^{N-1} h[i] s[k-i], \quad h[i] \equiv w[i] \equiv b_i. \quad (21)$$

A szűrő *hossza* N , a szűrő *rendszáma* $N-1$. Átviteli függvénye:

$$W(z) = \sum_{i=0}^{N-1} h[i] z^{-i}. \quad (22)$$

A FIR szűrő minden pólusa a $z=0$ -ban van, ezért *mindig stabilis*.

6.2. Lineáris fázis

Egy FIR szűrő *lineáris fázisú*, ha az impulzusválasz szimmetrikus vagy antiszimmetrikus a középpontjára:

$$h[i] = \pm h[N-1-i], \quad i = 0, 1, \dots, N-1. \quad (23)$$

Ekkor a fáziskarakterisztika $\varphi(\vartheta) = -\frac{N-1}{2}\vartheta + \varphi_0$ alakú, azaz a csoportkésleltetés $\tau_g = \frac{N-1}{2}$ konstans – ez *alakhú jelátvitelt* biztosít az áteresztő tartományban (a kiindulási hullámformát csak késlelteti, nem torzítja). Ez a tulajdonság IIR-rel csak közelítőleg érhető el (allpass-ekkel), és kulcsfontosságú pl. audio-, kép-, EKG-szűrésnél.

6.3. Tervezés ablakozással

A leggyakoribb és pedagógiailag legtisztább FIR-tervezési módszer. Lépések:

1. Az ideális szűrő $w_d[k]$ impulzusválaszát (20) szerint felírjuk (LP, HP, BP, BS).
2. A $w_d[k]$ -t egy $w_w[k]$ ablakfüggvénnyel megszorozzuk és véges hosszra csonkoljuk:

$$h[k] = w_d[k] \cdot w_w[k], \quad k = 0, 1, \dots, N-1. \quad (24)$$

Az ablakozás egyúttal $\frac{N-1}{2}$ ütem eltolást (késleltetést) is alkalmaz a kauzalitás biztosítására.

3. Az ablak megválasztása szabja meg az áteresztő-tartománybeli ingadozást és a záró-tartománybeli elnyomást.

A fontosabb ablakfüggvények tipikus paraméterei:

Ablak	Főnyaláb-szélesség ($\Delta\vartheta$)	Mellék hullám csillapítás	Záró tarto. csill. (A_s)
Téglalap (<i>rectangular</i>)	$1,8\pi/N$	-13 dB	~ 21 dB
Bartlett (háromszög)	$6,1\pi/N$	-25 dB	~ 25 dB
Hann	$6,2\pi/N$	-31 dB	~ 44 dB
Hamming	$6,6\pi/N$	-41 dB	~ 53 dB
Blackman	$11\pi/N$	-57 dB	~ 74 dB
Kaiser (β)	állítható	állítható	állítható

A **Kaiser-ablak** a β paraméterén keresztül folytonosan hangolható kompromisszumot biztosít. Adott A_s záró-csillapítás és $\Delta\vartheta$ átmeneti szélesség alapján β és a szükséges szűrőhossz N Kaiser empirikus képleteivel becsülhető.

6.4. Egyéb FIR-tervezési módszerek

Frekvenciamintavételezés

A kívánt $W_d(e^{j\vartheta})$ karakterisztikát N ekvidisztáns frekvencián mintavételezzük, majd inverz DFT-vel kapjuk a $h[k]$ együtthatókat.

Parks–McClellan (Remez-csere) algoritmus

Ekvi-ripple optimum a Csebisev-norma értelmében. A megadott specifikációhoz a legkisebb fokszerű FIR szűrőt szolgáltatja.

Legkisebb négyzetes (LS) tervezés

A $\int |W(e^{j\vartheta}) - W_d(e^{j\vartheta})|^2 d\vartheta$ hibát minimalizálja.

6.5. FIR realizációs struktúrák

- **Direkt forma (transzverzális):** a (8) képlet közvetlen leképezése késleltetők (D), szorzók és összegzők hálózatára.
- **Transzponált direkt forma:** a transzponációs tétellel származtatott alak, kvantálási szempontból gyakran kedvezőbb.
- **Lineáris fázisú struktúra:** kihasználja a $h[i] = h[N-1-i]$ szimmetriát, így a szorzók száma feleződik.

7. IIR szűrők

7.1. Általános alak

Az IIR szűrő rendszeregyenlete (6), átviteli függvénye (17). A rekurzív struktúra miatt jóval kisebb fokszámmal érhető el ugyanaz a szelektivitás, mint FIR-rel, de:

- a stabilitás külön ellenőrzendő a pólusok elhelyezkedéséből,
- a fázismenet nemlineáris,
- a kvantálási hatások kritikusabbak (limit cycle, koefficiens-érzékenység).

7.2. Tervezés analóg prototípusból

Az IIR-tervezés legelterjedtebb útja: kiindulunk egy folytonos idejű $H(s)$ analóg prototípusból (Butterworth, Csebisev-I, Csebisev-II, elliptikus / Cauer, Bessel), amelynek tervezése klasszikusan jól megoldott, majd egy $s \rightarrow z$ leképezéssel áttérünk a z -tartományba.

Az analóg prototípusok jellemzői:

Butterworth Maximálisan lapos $|H(j\omega)|^2$, monoton, lineáris fázisközelítés gyenge.

Csebisev-I Áteresztőben ekvi-ripple, záróban monoton.

Csebisev-II Áteresztőben monoton, záróban ekvi-ripple.

Elliptikus (Cauer) Mindkét tartományban ekvi-ripple, adott specifikációhoz a legkisebb fokszám.

Bessel Maximálisan lapos csoportkésleltetés (közelítőleg lineáris fázis).

7.3. Bilineáris (Tustin) transzformáció

A tankönyv 10.5. szakasza szerint az analóg $W(s)$ átviteli függvény diszkrétizálása a következő helyettesítéssel végezhető:

$$W(z) = W(s) \Big|_{s=\frac{2}{T_s} \frac{z-1}{z+1}}. \quad (25)$$

Tulajdonságai:

- A teljes $j\omega$ tengelyt az egységkörre, a bal félsíkot az egységkör belsejébe képezi le. Tehát *stabil analóg rendszerből stabil digitális rendszer áll elő*.
- Egy-egy értelmű, racionális leképezés – nem keletkezik aliasing (szemben az impulzusinvariáns transzformációval).
- A frekvenciatengely *nem lineáris* módon torzul:

$$\omega_a = \frac{2}{T_s} \tan\left(\frac{\vartheta}{2}\right), \quad \vartheta = \omega_d T_s. \quad (26)$$

Ez a *frekvenciaelhajlás (frequency warping)*. Ezért a tervezés előtt a kritikus frekvenciákat *előtorzítani* (prewarp) kell:

$$\omega_a^* = \frac{2}{T_s} \tan\left(\frac{\omega_d T_s}{2}\right). \quad (27)$$

7.4. Impulzusinvariáns transzformáció

Egy alternatíva: a folytonos idejű $h_a(t)$ impulzusválaszt T_s szerint mintavételezzük:

$$h[k] = T_s h_a(kT_s). \quad (28)$$

Az analóg pólusok és diszkrét pólusok kapcsolata $p_d = e^{p_a T_s}$. **Hátránya:** a folytonos idejű spektrum periodikus folytatása aliasingot okoz, ezért csak sávkorlátozott analóg prototípusokra (LP, BP) ajánlott.

7.5. Az IIR-tervezés lépésrendszere

1. A digitális szűrő specifikációja $(\vartheta_p, \vartheta_s, \delta_p, \delta_s)$.
2. Az analóg prototípus (LP) frekvenciáinak előtorzítása (26) alapján.
3. Az analóg LP prototípus (Butterworth/Csebisev/elliptikus) fokszámának és $H_a(s)$ átviteli függvényének tervezése.
4. Frekvenciatranszformációval LP \rightarrow HP, BP, BS megvalósítása.
5. Bilineáris transzformáció $H_a(s) \rightarrow H_d(z)$ (25) szerint.
6. Realizáció (struktúra, kvantálás, fixpontos aritmetika ellenőrzése).

7.6. IIR realizációs struktúrák

Direkt forma I

A számláló és nevező koefficienseit külön blokkokban valósítja meg, ezért $m + n$ késleltetőt használ. Túlsordulásra rendkívül érzékeny.

Direkt forma II

(kanonikus) A két blokkot összevonja, mindössze $\max(m, n)$ késleltetővel. Kvantálási szempontból kedvezőtlen, mert a köztes csomópont nagy dinamikával rendelkezik.

Kaszád realizáció

A $W(z)$ másodfokú szekciók szorzataként íródik: $W(z) = \prod_i \frac{b_{0i} + b_{1i}z^{-1} + b_{2i}z^{-2}}{1 + a_{1i}z^{-1} + a_{2i}z^{-2}}$. Numerikus szempontból a leggyakrabban használt struktúra (*biquad sections*).

Párhuzamos realizáció

$W(z)$ parciális tört felbontása.

Lattice/lattice-ladder struktúra

Adaptív szűrőkben, beszédkódolásban (LPC).

8. FIR és IIR összehasonlítása

Szempont	FIR	IIR
Stabilitás	Mindig stabilis	A pólusoknak az egységkörön belül kell lenniük
Lineáris fázis	Egyszerűen elérhető szimmetrikus $h[k]$ -val	Csak közelítőleg (allpass-szal)
Memóriaigény / fokszám	Adott specifikációhoz nagyobb fokszám szükséges	Lényegesen kisebb fokszám
Tervezés	Egyszerű (ablakozás, Parks–McClellan)	Analóg prototípuson keresztül, bilineáris transzformációval
Kvantálási érzékenység	Kicsi, nincs limit cycle	Nagy, lehet limit cycle, túlsordulás
Visszacsatolás	Nincs (transzverzális)	Van (rekurzív)
Csoportkésleltetés	Konstans (lin. fázis)	Frekvenciafüggő
Tipikus alkalmazás	Audio, kép, kommunikáció (lin. fázis kell)	Vezérlés, biomedikai mérés, kis erőforrás esetén

9. Megvalósítási kérdések

9.1. Véges szóhossz és kvantálási hibák

A digitális szűrő gyakorlati realizációjakor négy különböző kvantálási hatással kell számolni:

- ADC kvantálási zaj:** a bemeneti minták B bitre kerekítése $\sigma_e^2 = q^2/12$ varianciájú additív zajt eredményez (q a kvantum).
- Koefficiens-quantálás:** a $\{a_i, b_i\}$ kerekítése a pólusok és zérusok elmozdulásához, ezért a karakterisztika torzulásához vezet. IIR esetén az érzékenység drámaian nőhet, ha a pólusok a $z = 1$ közelében vannak (ezért használnak biquad-kaszádokat).
- Aritmetikai kerekítési zaj:** minden szorzás után kerekítés, amely a struktúrán át a kimenetre szuperponálódik.
- Túlsordulás:** rögzített pontos aritmetikában a köztes érték skálázása kritikus – gyakran L_2 -vagy L_∞ -norma alapján.

9.2. Limit cycle

IIR szűrőknél véges szóhossz esetén nulla bemenetnél is megjelenhet egy kis amplitúdójú periodikus oszcilláció (*granular limit cycle*), illetve nagy bemenetnél a túlsordulás miatt nagy amplitúdójú *overflow limit cycle*. Megakadályozására bevezethető a wraparound aritmetika helyett *telítéses* aritmetika, illetve speciális struktúrák (pl. második rendű szekciók biquad alakja).

9.3. Hardver-platformok

- **Lebegőpontos DSP/CPU** (TMS320C6x, ARM Cortex-M F-sorozat, x86 SIMD): kvantálási hatások általában elhanyagolhatók, könnyű prototipizálás.
- **Fixpontos DSP, mikrokontroller** (Cortex-M0/M3/M4): a $Q_{m.n}$ formátum, skálázás, telítés és blokkos lebegőpontos (*block floating point*) aritmetika gondos tervezést igényel.
- **FPGA / ASIC**: párhuzamosan realizálható transzverzális struktúrák, MAC-cellák; nagy mintavételi frekvencia érhető el (radar, szoftverrádió).
- **NPU / TinyML platformok**: mély hálózatok kombinálása klasszikus szűrőkkel (előfeldolgozó pipeline) ipari, biomedikai, bioakusztikai alkalmazásokban.

10. Számpélda: másodrendű IIR aluláteresztő bilineáris tervezéssel

Feladat. Tervezzünk másodrendű Butterworth aluláteresztő digitális szűrőt $f_c = 100$ Hz vágási frekvenciával, $f_s = 1$ kHz mintavételi frekvencián.

1. lépés – előtorzítás. A digitális vágási normált körfrekvencia $\vartheta_c = 2\pi f_c/f_s = 0,2\pi$. Az analóg előtorzított vágási körfrekvencia:

$$\omega_a^* = \frac{2}{T_s} \tan\left(\frac{\vartheta_c}{2}\right) = 2f_s \tan(0,1\pi) \approx 649,84 \text{ rad/s.}$$

2. lépés – analóg prototípus. A normált 2. rendű Butterworth aluláteresztő: $H_a(s) = \frac{\omega_a^{*2}}{s^2 + \sqrt{2}\omega_a^*s + \omega_a^{*2}}$.

3. lépés – bilineáris transzformáció. Helyettesítsük (25) szerint $s = 2f_s(z-1)/(z+1)$. Egyszerűsítés után:

$$W(z) = \frac{0,06746(1+z^{-1})^2}{1-1,1430z^{-1}+0,4128z^{-2}}.$$

4. lépés – ellenőrzés. A pólusok $p_{1,2} = 0,5715 \pm j0,2980$, így $|p_{1,2}| = 0,6425 < 1$, a szűrő stabilis. A $\vartheta = 0$ -ban $W(1) = 1$, a $\vartheta = \pi$ -ben $W(-1) = 0$, ami megfelel az aluláteresztő követelményének.

Python ellenőrzés (scipy.signal):

```
1 import numpy as np
2 from scipy import signal
3
4 fs = 1000.0           # mintavételi frekvencia [Hz]
5 fc = 100.0           # vágási frekvencia [Hz]
6 N = 2                # rendszám
7
8 # Butterworth IIR LP tervezés bilineáris transzformációval
9 # (a SciPy alapértelmezetten ezt használja és előtorzít)
10 b, a = signal.butter(N, fc/(fs/2), btype='low')
11
```

```

12 # Stabilitás-ellenőrzés
13 poles = np.roots(a)
14 print("Pólusok:", poles)
15 print("|p_i| :", np.abs(poles))    # mindegyik < 1 -> stabilis
16
17 # Frekvenciakarakterisztika
18 w, H = signal.freqz(b, a, fs=fs)

```

11. Alkalmazási területek

- **Audiotechnika:** ekvalizáció, zajkapuk, dinamikatömörítés, térhatás (Schroeder-zengetők).
- **Telekommunikáció:** pulzusalakító szűrők (root raised cosine), csatornaki egyenlítés, MFCC-spektrogram előfeldolgozás.
- **Biomedikai jelfeldolgozás:** EKG bázisvonal-eltávolítás (HP-szűrő), 50/60 Hz-es notch, izomzaj eltávolítás.
- **Méréstechnika és vezérlés:** anti-aliasing előszűrő digitalizáció előtt, mintavételezett szabályozási hurkok (z -tartománybeli PID).
- **Szeizmológia, hidroakusztika, bioakusztika:** keskenysávú detektorok, sáváteresztő bankok, ML-alapú előfeldolgozási láncok.
- **Radar- és szoftverrádió-rendszerek:** Doppler-szűrés, decimáló FIR-bankok, polifázis szűrőszervezetek.
- **Képfeldolgozás:** 2D-FIR konvolúciós magok (Sobel, Gauss, Laplace), separable design.

12. Összefoglalás

A digitális szűrő egy diszkrét idejű, lineáris, invariáns (általában kauzális) rendszer, amely jelek frekvenciatartalmát alakítja. Háromféle, egymással ekvivalens leírása lehetséges: az időtartománybeli rendszeregyenlet (differenciaegyenlet), illetve impulzusválasz; a ϑ normált körfrekvencián értelmezett $W(e^{j\vartheta})$ átviteli karakterisztika (DTFT); valamint a z -tartománybeli $W(z)$ átviteli függvény. Az utóbbi pólus-zérus elrendezése mind a stabilitásról ($|p_i| < 1$), mind a frekvenciamenet alakjáról közvetlen geometriai információt nyújt.

A szűrőosztályozás alapdichotómiája az impulzusválasz tartója szerint a FIR – IIR megkülönböztetés. A FIR szűrők mindig stabilisak, lineáris fázis egyszerűen elérhető és kvantálási szempontból robusztusak; cserébe nagyobb fokszámot igényelnek. A leggyakoribb tervezési módszerük az ablakozásos eljárás vagy a Parks–McClellan optimum. Az IIR szűrők rekurzív struktúrájuk miatt jóval kisebb fokszámmal érnek el meredek szelekciót, ám a stabilitás és a fázislinearitás külön gondot igényel; tipikus tervezésük analóg prototípuson (Butterworth, Csebisev, elliptikus) keresztül történik, a z -síkra a bilineáris (Tustin-)transzformációval való áttéréssel, megfelelő frekvencia-előtorzítással.

A gyakorlati realizáció során a véges szóhosszból eredő kvantálási effektusokat (koefficiens-érzékenység, kerekítési zaj, túlcsoportulás, limit cycle) megfelelő struktúraválasztással (pl. kaszkádba kötött másodrendű szekciók) és skálázással lehet kezelni. A szűrő hardveres megvalósítása lebegőpontos vagy fixpontos DSP-n, mikrokontrolleren, FPGA-n vagy dedikált gyorsítóhardveren történhet, az alkalmazás mintavételi frekvencia, energia-, késleltetés- és pontosságigénye szerint.

Felhasznált irodalom

- [1] Kuczmann Miklós: *Jelek és rendszerek*. Egyetemi jegyzet, Széchenyi István Egyetem, Győr, 2007. (7–10. fejezet.)

- [2] A. V. Oppenheim, R. W. Schaffer: *Discrete-Time Signal Processing*. 3rd ed., Pearson, 2009.
- [3] J. G. Proakis, D. G. Manolakis: *Digital Signal Processing – Principles, Algorithms, and Applications*. 4th ed., Pearson, 2007.
- [4] S. K. Mitra: *Digital Signal Processing – A Computer-Based Approach*. 4th ed., McGraw-Hill, 2011.
- [5] L. B. Jackson: *Digital Filters and Signal Processing*. 3rd ed., Springer, 1996.